Kwintesencja: Aksjomat o równoległych wynika z aksjomatu o prostej

1. Wynikanie aksjomatu o prostej z obrotów płaszczyzny

Aksjomat geometrii Euklidesowej mówi, że dwa punkty wyznaczają prostą. Znaczy to, że przez dwa dowolnie rozmieszczone w przestrzeni punkty można poprowadzić tylko jedną prostą, i tylko prostą. Inaczej mówiąc, dwa punkty nie wyznaczają np. hiperboli lub tangensoidy.

Skąd możemy być pewni, że dwa punkty wyznaczają tylko jedną prostą? Współczesny matematyk najczęściej powie, że aksjomat przyjmuje się bez dowodu. Należy jednak pamiętać, że aksjomaty zostały opracowane na podstawie zgromadzonej wiedzy; z tego powodu nie są one dowolne.

Skąd możemy wiedzieć, że przez dwa punkty nie przechodzi tylko jedna tangensoida? Z tego samego źródła, z którego wiemy, że przez dwa punkty przechodzi tylko jedna prosta. Tym źródłem jest zgromadzona geometryczna wiedza i przeprowadzane w wyobraźni doświadczenia.

Wyobraźmy sobie przechodząca przez dwa punkty tangensoidę. Ta krzywa leży na pewnej płaszczyźnie. Ale w przestrzeni przez dwa punkty można poprowadzić nieskończenie wiele płaszczyzn i na każdej z nich na tych samych dwóch punktach można wyznaczyć podobną, a właściwie, pod względem kształtu identyczną tangensoidę. Wszystkie wyznaczone w ten sposób tangensoidy leżą na powierzchni pewnej obrotowej bryły, której oś symetrii przechodzi przez dwa dane punkty.

Wyobraźmy sobie teraz prostą, która przechodzi przez te same dwa punkty; innych linii tam nie ma. Obracanie płaszczyzny wokół osi przechodzącej przez te dwa punkty nie powoduje wyznaczania (powstawania) jakiejkolwiek bryły obrotowej. Prosta jest jedyną ze wszystkich możliwych linii, jakie można poprowadzić przez te dwa punkty, która podczas obracania" przechodzi niejako sama w siebie i staje się z tego powodu jednoznaczną linią na dwóch punktach. Z tego właśnie powodu mówi się, że dwa punkty wyznaczają tylko jedną prostą; nie więcej niż jedną prostą i nie inną linię, lecz właśnie prostą.

2. Co to takiego "Tarcza Euklidesa"?

W największym uproszczeniu Tarcza Euklidesa jest pomocniczym tworem geometrycznym, którego Euklides nie sformułował w swoich "Elementach", ale można przypuszczać, że korzystał z niego w sposób intuicyjny.

Konstrukcja Tarczy Euklidesa jest następująca: Przez dwa punkty poprowadzić łączący je odcinek. Przedłużyć odcinek poza jeden z punktów i na przedłużeniu wyznaczyć trzeci punkt (pomocniczy) odcinający drugi odcinek tej samej długości. Wyznaczyć czwarty punkt poza odcinkiem jednakowo odległy od istniejących punktów skrajnych. Nowo powstały punkt połączyć odcinkiem z punktem środkowym. (Wykreślone w ten sposób cztery punkty leżą niejako w trzech wierzchołkach pewnego rombu i na przecięciu przekątnych rombu.) Obracać powstały twór wokół odcinka z trzema punktami. Przy tej operacji czwarty punkt i odcinek łączący ten punkt z punktem środkowym zakreślają koło, które tu nazwałem Tarczą Euklidesa.

Pomocniczy twór geometryczny zwany Tarczą Euklidesa (TE) służy dla wykazania, że aksjomat o równoległych wynika z aksjomatu o prostej, oraz dla wykazania, że zmianie aksjomatu o równoległych do postaci istniejącej w geometrii nieeuklidesowej powinna towarzyszyć zmiana aksjomatu o prostej do postaci: dwa punkty wyznaczają co najmniej dwie proste.

3. Co wynika z konstrukcji Tarczy Euklidesa

Załóżmy, że pierwsze dwa punkty, które posłużyły do konstrukcji Tarczy Euklidesa są tymi samymi punktami, które wyznaczają prostą. Do nich zostały dodane dwa punkty pomocnicze: jeden na prostej, drugi obok niej. Odległość drugiego punktu pomocniczego od prostej jest długością promienia TE. Obracanie TE przekonuje, że prosta nie zmienia ani charakteru, ani położenia; obracanie TE nie powoduje powstawania bryły obrotowej. Gdy na tych samych wyjściowych punktach zamiast prostej umieścić np. hiperbolę, obroty TE powodują zakreślanie przez tę krzywą pewnej bryły.

Gdy jest dana prosta i nie leżący na niej punkt, to odległość punktu od prostej jest tożsama z promieniem TE, a dany punkt jest środkowym punktem konstrukcji TE. Na tej podstawie można odtworzyć punkty skrajne z konstrukcji TE. W tym celu prowadzimy prostopadłą do promienia TE, która przechodzi przez dany punkt i na niej wykreślamy w obu kierunkach od danego punktu odległości punktów skrajnych np. równe promieniowi TE. Punkty skrajne są w tym przypadku pomocniczymi i służą do identyfikacji i pokazania, że mamy do czynienia z TE oraz do pokazania, wokół której osi obraca się TE.

Wyobraźmy sobie nieskończony walec o promieniu r i tworzącej k. Na jego osi znajduje się punkt P. W dowolnej płaszczyźnie przekroju, który przechodzi przez oś walca, tworząca walca k i punkt P na osi stanowią prostą i nie leżący na niej punkt z aksjomatu o równoległych. W naszkicowanym obrazie jednoznacznie widać, że oś walca jest jedyną linią prostą, która przechodzi przez punkt P i nie przecina się z tworzącą walca k.

Geometrzy nieeuklidesowi przeczą temu oczywistemu faktowi. Twierdzą, że w takiej sytuacji przez punkt P można poprowadzić jeszcze co najmniej jedną, inną prostą, która nie przecina tworzącej k. Czyli pośrednio twierdzą, że taki nieskończony walec o promieniu r posiada co najmniej dwie osie symetrii, które nie przecinają powierzchni walca.

4. Jak z dwóch punktów wynikają dwa aksjomaty geometrii Euklidesa

Schemat prosty - Aksjomat o prostej:
Dwa dane punkty *wyznaczają* tylko jedną prostą (co potwierdza doświadczenie z Tarczą Euklidesa).

Schemat rozwinięty, prowadzący do aksjomatu o równoległych:
(1)Dwa dane punkty(1) *wyznaczają* Tarczę Euklidesa, a w szczególności wyznaczają promień TE.
Promień TE *wyznacza* najkrótszą odległość miedzy prostą i nie leżącym na niej punktem.
Najkrótsza odległość między prostą i nie leżącym na niej punktem *wyznacza* położenie prostej i położenie nie leżącego na niej punktu.
Prosta i nie leżący na niej punkt *wyznaczają* (2)tylko jedną prostą(2), która nie przecina danej prostej (co potwierdza doświadczenie z Tarczą Euklidesa).

Uproszczenie schematu rozwiniętego, polegające na odrzuceniu pośrednich wynikań, prowadzi do zależności: (1)...(1) *wyznaczają* (2)...(2), czyli do aksjomatu o prostych.

5. Kwintesencja: Aksjomat o równoległych wynika z aksjomatu o prostej

I: Przyrządy kreślarskie: linijka i cyrkiel.
II: Dane są dwa punkty A i B.
1. Przez punkty A i B poprowadzić prostą l.
2. Na prostej l wyznaczyć cyrklem punkt C rożny od B, taki że AC = AB.
3. Cyrklem wyznaczyć dowolny punkt D nie leżący na l, jednakowo odległy od punktów B i C.
4. Połączyć odcinkiem punkty A i D.
5. Przedłużyć odcinek AD poza punkt D i na przedłużeniu wyznaczyć odcinek DE równy AD.
6. Z punktów A i E przy rozwarciu cyrkla większym od AD wykreślić dwa przecinające się łuki.
7. Przez punkty przecięcia się łuków poprowadzić prostą k.
8. Prosta k oraz nie leżący na niej punkt A to baza aksjomatu o równoległych, przy tym prosta l, która przechodzi przez punkty A i B, jest tą samą prostą, która przechodzi przez punkt A i nie przecina się z prostą k.

Uwaga 1: Dwa punkty wyznaczają prostą i nie leżący na niej punkt po uprzednim wyborze płaszczyzny, na której mają leżeć ów punkt i prosta. Stąd równie dobrze można twierdzić, że to trzy punkty wyznaczają prostą i nie leżący na niej punkt.

Uwaga 2: Powyżej wykorzystany został znany sposób kreślenia na płaszczyźnie pojedynczych przechodzących przez dane punkty nie przecinających się prostych. "Koń z rzędem" i na dodatek wielka sława dla tego, kto zna sposób wykreślenia nie przecinających się prostych, które przechodzą przez dane punkty np. po dwie przez każdy jeden punkt.

Bogdan Szenkaryk "Pinopa"

Legnica, 22 - 24 lipca 1998 r.

... i trochę dodaję o zdolnociach nowych matematyków i fizyków:

Nadchodzą nowe pokolenia matematyków i fizyków. Czym różną się nowi matematycy i fizycy od starych?

Zacznę od matematyków. Nowi potrafią z łatwością wykazać, że V postulat Euklidesa o równoległych daje się wyprowadzić z innych postulatów. Biorą oni linię prostą i nie leżący na niej punkt. Na linii prostej biorą jeszcze jeden dowolny punkt. Kreślą w tym punkcie pod dowolnym, ale nie zerowym kątem drugą prostą, pomocniczą. Przesuwając otrzymany układ prostych wzdłuż jednej bądź drugiej prostej, bądź wpierw wzdłuż jednej a potem wzdłuż drugiej prostej, otrzymują taki sam układ, przesunięty liniowo na pewną odległość względem poprzedniego układu. Ten nowy układ prostych nazywają układem równoległym względem poprzedniego. Przesuwając takim sposobem owe proste udowadniają, że pod zadanym dowolnym kątem względem danej prostej przez punkt nie leżący na danej prostej można poprowadzić tylko jedną prostą, która nie przecina danej prostej. Podstawą dla tego dowodu jest to, że dwa punkty zawsze wyznaczają jeden konkretny odcinek oraz że owe liniowe przesunięcia układu prostych nie wpływają ani na właściwości prostych, ani na właściwości zawartego między nimi kąta. Przede wszystkim liniowe przesuwanie danej prostej do punktu, który dotychczas leżał poza nią, nie powoduje przemiany tej prostej we wiązkę prostych, składającą się przynajmniej z dwóch prostych, i na pewno wiadomo, że nie przecina się ona z prostą leżącą w jej poprzednim, wyjściowym położeniu.

Oczywiście, nowi matematycy doskonale rozumieją niedorzeczność V postulatu Łobaczewskiego, w jego obecnej postaci.

Co się tyczy nowych fizyków - myślę tutaj szczególnie o fizykach teoretykach - to jak zwykle, doskonale znają oni matematykę i w swojej pracy wykorzystują jej nowe jej osiągnięcia.